

1.- Discute el siguiente sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea

$$\left. \begin{array}{l} kx + y - z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{compatible.} \\ \text{puntos) (2,5} \end{array}$$

2.- Contesta **razonadamente** a las siguientes preguntas: (2 puntos)

- ¿Todo sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas es compatible indeterminado?
- ¿Un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas puede ser incompatible?
- ¿Todo sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas es compatible determinado?
- ¿Un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas puede ser incompatible?

3.- Resuelve $A \cdot B^T \cdot X = -2C$, siendo B^T la matriz traspuesta de B y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

4.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$ y utilizando correctamente las propiedades de los

determinantes, calcula:

(1,5 puntos)

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} & \text{b) } \begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix} & \text{c) } \begin{vmatrix} 2a & 2b & 6c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{vmatrix} \end{array}$$

5.- Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Halla el valor de m para el que la matriz A no tiene inversa.
- Resuelve $A \cdot X = O$ para $m = 3$. (2 puntos)

SOLUCIONES

$$1.- \begin{cases} kx + y - z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}$$

en principio, en A no tenemos ningún menor de orden 2 distinto de cero, hacemos el

$$\text{determinante de A: } |A| = k^3 + 1 - 1 + k - k - k = k^3 - k = 0 \Rightarrow k(k^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } k = 0 \rightarrow r(A) = 2 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A') = 3 \text{ INCOMPATIBLE}$$

Para $k = 1 \rightarrow r(A) = 2 \rightarrow r(A') = 2$ (2ª y 3ª filas iguales) C. INDETERMINADO

$$\text{Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones, ya que } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow x = t \rightarrow \begin{cases} y - z = 1 - t \\ y + z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow y = 1 - t \Rightarrow z = 0 \rightarrow \text{SOL: } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$$

Para $k = -1 \rightarrow r(A) = 2 \rightarrow r(A') = 2$ (1ª y 2ª filas proporcionales) C. INDETERMINADO, nos quedamos con la 2ª y 3ª ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \rightarrow z = t \rightarrow \begin{cases} x - y = -1 - t \\ x + y = 1 + t \end{cases} \Rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 + t \rightarrow \text{SOL: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

Para $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1 \rightarrow r(A) = r(A') = 3$ COMPATIBLE DETERMINADO

Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k & k & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{vmatrix}}{k^3 - k} = \frac{k^2 + k^2 - k + k^3 - 1 - k^2}{k(k^2 - 1)} = \frac{k^3 + k^2 - k - 1}{k(k^2 - 1)} = \frac{(k-1)(k+1)^2}{k(k-1)(k+1)} = \frac{k+1}{k}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \end{vmatrix}}{k^3 - k} = \frac{k^3 - k^2 + 1 + k - k^3 - k}{k(k^2 - 1)} = \frac{-k^2 + 1}{k(k^2 - 1)} = \frac{-(k-1)(k+1)}{k(k-1)(k+1)} = \frac{-1}{k}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix}}{k^3 - k} = \frac{k^4 + k + 1 - k - k^2 - k^2}{k(k^2 - 1)} = \frac{k^4 - 2k^2 + 1}{k(k^2 - 1)} = \frac{(k^2 - 1)^2}{k(k^2 - 1)} = \frac{k^2 - 1}{k}$$

2.- a) No, puede ser incompatible, por ejemplo si el rango de la matriz del sistema (A) es 2 y el de la matriz ampliada (A') es 3. (Según el teorema de Rouché)

b) Claro que sí, si, por ejemplo $r(A) = 3$ y $r(A') = 4$

c) No, puede ser incompatible si $r(A) = 3$ y $r(A') = 4$ o también compatible indeterminado, si $r(A) = 2$ y $r(A') = 2$, por ejemplo.

d) En un sistema homogéneo siempre se cumple que $r(A) = r(A')$, porque siempre tiene solución, lo que pasa es que si este número coincide con el de incógnitas sólo tiene la solución trivial. Por lo tanto si $r(A) = r(A') = 4$ sólo tiene la solución trivial y si $r(A) = r(A') < 4$ tiene infinitas soluciones.

3.- $A \cdot B^T \cdot X = -2C$, empezaremos calculando la matriz $D = A \cdot B^T$ y también $-2C$

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}; \quad -2C = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hallamos } D^{-1} \rightarrow |D| = 2 - 30 = -28 \rightarrow D^{-1} = -\frac{1}{28} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{28} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{28} \begin{pmatrix} 4 & 28 \\ -10 & -42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$4.- a) \begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3d & 3f & 3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} \quad (1^a \text{ y } 2^a \text{ filas})$$

$$\text{proporcionales) } = \begin{vmatrix} a & c & b \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$$

$$b) \begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$$

$$c) \begin{vmatrix} 2a & 2b & 6c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$$

5.- a) Para que la matriz A tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de 0,

$$\text{veamos para que valores de m ocurre eso: } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = -6 + 2m = 0 \Rightarrow m = 3$$

Existe inversa si $m \neq 3$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow r(A) = r(A') = 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = -z \end{cases} \xrightarrow{z = t} \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + y = -t \end{cases} \Rightarrow x = -t \rightarrow y = t \quad \text{Sol: } \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$